Bernoullische Differentialgleichung

Es seien f_0, f_1 stetige reelle Funktionen in einem Intervall (a, b) und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann heißt die Differentialgleichung

$$y' = f_0(x)y^\alpha + f_1(x)y$$

eine Bernoullische Differentialgleichung. Für $\alpha = 0$ entsteht eine inhomogene lineare und für $\alpha = 1$ eine homogene lineare Differentialgleichung, die nach Rezept gelöst werden können.

a) Zeigen Sie, dass im Fall $\alpha \neq 1$ und $y > 0$ durch die Substitution $z = y^{1-\alpha}$ eine lineare Differentialgleichung für z entsteht.

b) Beweisen Sie folgenden Satz: Sind f_0, f_1 in (a, b) stetig und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y' = f_0(x)y^\alpha + f_1(x)y, \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in (a, b), \quad y_0 > 0$$

eine eindeutig bestimmte Lösung in einer Umgebung von x_0. Ist $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$, dann gilt das auch für $y_0 < 0$.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$4y' \sin x = -y \left(1 + y^4\right) + y^5 \cos x.$$